La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación

Huerta Palau, M. Pedro

manuel.p.huerta@uv.es, Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se reflexiona alrededor de una manera de resolver problemas de probabilidad que llamamos por simulación. Se describe la forma de resolver los problemas en cuatro etapas y un método de resolución con contenido heurístico en un número de pasos. Se muestra con un ejemplo el método y su uso para la formación de maestros, justificando la pertinencia de un enfoque posible basado en la resolución de problemas de probabilidad por simulación con intención didáctica.

Palabras clave: Probabilidad, Simulación, Resolución de problemas, Formación de maestros.

1. Introducción

El significado del verbo "simular" y del sustantivo "simulación" son significados compartidos por una amplia mayoría de los ciudadanos. Simular, y su acción, simulación adquieren el significado de "representar a algo fingiendo o imitando lo que no es" (DRAE, 2015). Distinto del verbo simular es el verbo "experimentar", y su correspondiente sustantivo, "experimentación", que requiere de vivir o de "notar en uno mismo alguna cosa, alguna impresión o algún sentimiento" (DRAE, 2015). Qué bueno sería poder experimentar situaciones reales en las que, de algún modo, estuvieran implicadas la aleatoriedad, la incertidumbre. Pero esto no siempre es posible. En todo caso se pueden simular con el "riesgo" que ello conlleva. Así, no es posible que en la escuela se experimente la equiprobabilidad con el lanzamiento de una *moneda ideal*, la "moneda" con igual probabilidad en ambos lados. Entre otras razones porque no existe tal moneda. En su lugar, se simula esa idea teórica con el lanzamiento de moneadas reales (euro, distintos pesos, sol, bolívar, colón, guaraní, córdoba, dólares de cualquier tipo, etc.) con el objetivo compartido por sus usuarios de poder obtener conclusiones sobre esa "moneda" que es, a la vez, euro, peso, sol, bolívar, colón, guaraní, córdoba o dólar y ninguna de todas ellas. No obstante, con cualquiera de dichas monedas reales se pueden experimentar sensaciones compartidas, como la incertidumbre o la aleatoriedad, pero no resultados posibles. Podemos experimentar cara o cruz o canto, en las monedas reales, pero simular solamente cara o cruz con ellas.

En la literatura podemos encontrar multitud de referencias a la palabra simulación. Estas pueden ir desde ser considerada en Heitele (1975) como una idea estocástica fundamental, junto con el modelo de la urna, a un instrumento para los procesos de modelización (Batanero, 2003; Henry, 2005), pasando por ser un recurso útil para la enseñanza de la naturaleza frecuencial o experimental de la probabilidad (Chaput, Girard, Henry, 2011), y como una herramienta en la formación de maestros y profesores (Maxara y Biehler, 2006; Batanero, Biehler y Maxara, 2010; Sánchez, 2002; Godino, Cañizares y Díaz, 2010; Batenaro, Godino y Cañizares, 2005) etc., la lista de referencias podría ser interminable. Pero muy poco se ha dicho de la simulación como un método o una manera de resolver problemas de probabilidad, si acaso en Shaughnnesy (1983), Bryan (1986) y Maxara y Biehler (2006) de quienes hablaremos más adelante. En realidad muy poco sabemos sobre los problemas de probabilidad y sobre sus resoluciones. Es éste el objetivo de este trabajo, tratar de acercar los dos campos de investigación el de la resolución de problemas de matemáticas y el de la educación probabilística y tratar de aprender

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 53-67). Granada, 2015.

de ambos, mostrando un ejemplo sobre la manera de resolver problema de probabilidad por simulación en un contexto muy particular, la formación de maestros, y las posibles implicaciones que, modestamente, se pueden extraer de todo ello.

2. La simulación como método de resolución de problemas: revisión bibliográfica.

En lo que sigue prestaremos atención a la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad en tanto que los autores describan un proceso, más o menos completo, de resolución de problemas mediante un número determinado de pasos que permita al resolutor encontrar una respuesta a un problema de probabilidad dado al transitar por ellos.

Un primer ejemplo de esto que queremos decir lo encontramos en Shaughnessy (1983) quien sugiere una metodología de enseñanza de la probabilidad en los cursos introductorios de probabilidad y estadística con estudiantes de secundaria y primeros cursos de la enseñanza superior. Su idea de que los estudiantes transiten desde la conjetura al modelo pasa por la experimentación y la simulación. Así, en dicho texto, propone la resolución de problemas para con este fin sugiriendo a los profesores cómo realizar una simulación de un experimento de probabilidad con sus alumnos siguiendo los pasos que vemos a continuación:

a. Modelar el experimento con artilugios con probabilidades conocidas: monedas, dados, pirindolas, números aleatorios…
b. “Llevar a cabo” el experimento muchas veces con dichos artilugios, así acumulando los resultados de pequeños grupos pueden ayudar a tener una muestra “bastante grande”.
c. Recolectar, organizar y analizar los datos (requiere de algunas habilidades estadísticas).
d. Calcular probabilidades experimentales u otros resultados experimentales (por ejemplo, frecuencias) a partir de los datos.
e. Realizar inferencias u obtener conclusiones desde los resultados experimentales, esto es, mirar hacia atrás. (p. 340)

En efecto, en la manera en la que Shaughnessy se refiere a la simulación lo que parece estar sugiriendo es una metodología de enseñanza de la probabilidad basada en la resolución de problemas mediante la simulación de *lápiz y papel* (paso b) de tal forma que con la obtención de información relevante (paso d) el resolutor mejore su conjetura inicial sobre una posible respuesta al problema y realice inferencias sobre dichas conjeturas iniciales (paso e). Así, advierte al resolutor por vía del profesor: “before doing any of these problems, *always write down your best guess first*, and only then carry out a simulation of the problem” (Ibid, p. 340), con el fin de obtener alguna información que pueda usarse en beneficio de dar una respuesta al problema, que de otra forma no puede obtener, o tal vez no desea. Así pues, el autor parece sugerir a los profesores que tengan en cuenta que sus alumnos deberían realizar un trabajo previo en el problema antes de pensar en llevar a cabo cualquier simulación, como conjeturar, aventurarse a dar una respuesta sobre lo que se pregunta en el problema.

El modelo de Bryan (1986), sin embargo, es de los pocos que parece estar pensados como método para resolver problemas de probabilidad, sin otro interés que el propio de encontrar una respuesta al problema formulado. Basado en un texto conjunto de la NCTM y la American Statistical Association para la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad mediante la simulación, titulado The Art and Techinques of Simulation, (Gnanadesikan, Scheaffer y Swift, 1987), citado en Bryan (1986), es un método constituido por 8 etapas o pasos, que describimos a continuación para situaciones aleatorias en las que es razonable considerar la hipótesis de la equiprobabilidad:

Paso 1. Formula el problema claramente de tal forma que se proporcione toda la información necesaria y el objetivo sea claro.

Paso 2. Formula los sucesos simples que constituyen la base de la simulación

Paso 3. Formula o establece los supuestos subyacentes que simplifiquen el problema de manera que pueda hallarse una solución.

Paso 4. Selecciona un modelo para un experimento simple escogiendo un artilugio que genere resultados aleatorios con las probabilidades prescritas para el suceso real.

Paso 5. Define y gestiona un ensayo que consiste en una serie de simulaciones de sucesos simples que se detienen cuando el suceso de interés ha sido simulado una vez.

(Defina lo que es una simulación y realice tantas simulaciones como sean necesarias hasta que el suceso por el que se pregunta ocurra una vez.)

Paso 6. Registre la observación de interés tabulando la información necesaria para alcanzar el objetivo deseado. Muy a menudo, esto requiere, en cada ensayo, simplemente una notación de favorable o no favorable. Ocasionalmente, se anotarán resultados numéricos.

Paso 7. Repita los pasos 5 y 6 al menos 50 veces. Una estimación apropiada de una probabilidad a partir de resultados empíricos requiere de un gran número de ensayos. Si la simulación se hace con la ayuda de una computadora entonces 1000 o más ensayos pueden ejecutarse sin ningún inconveniente.

Paso 8. Resuma la información y obtenga conclusiones. Podemos estimar la probabilidad de un suceso de interés, A, evaluando:

$$\frac{\textit{número de ensayos favorables a } A}{\textit{número total de enseyos en el experimento}}$$

En la discusión introducen una interesante reflexión sobre la equivalencia entre los artilugios o generadores de azar posibles para la simulación de un problema dado y su posible influencia en su solución. No obstante, el método, dicen los autores, puede usarse en situaciones más complejas, en las que la hipótesis de la equiprobabilidad no es razonable pero entonces las probabilidades de inicio han de ser conocidas. En este caso, la discusión no se centra en el método sino en el paso 4 del método en el que hay que seleccionar el generador de azar apropiado para las probabilidades de inicio. En este punto se sugiere el uso de los números aleatorios, lo que es conocido como método de simulación de Monte Carlo (Engel, 1975a).

Es posible reconocer en el método tiempos de trabajo diferentes para un resolutor, así ha de hacer un trabajo previo con el problema formulado (pasos 1 a 3), un trabajo posterior de simulación (pasos 5 a 7), siendo el paso 4 el que permite ir del problema a la simulación en los pasos 5 a 7 y la solución del problema estimada en el paso 8 por la frecuencia relativa del suceso de interés en relación con el número total de ensayos.

Por su parte, Maxara y Biehler (2006), algo más de 20 años después que los dos trabajo anteriores que hemos analizado, consideran que con la simulación se pueden cumplir dos objetivos diferentes que podrían llegar a ser incluso complementarios dependiendo del uso que se haga de ella. Así, se puede ver a la simulación como: a) método de resolución substitutivo de las “matemáticas” requeridas para su resolución teórica, al substituir el modelo teórico que resolvería el problema por un modelo que se ha de crear e implementar *ad hoc* para su resolución, es decir, algo parecido a lo que llamaremos nosotros la manera de resolver los problemas por simulación y b) la simulación como contexto de enseñanza en el que la naturaleza del concepto de probabilidad en juego sea la consecuencia de una experimentación previa. La fenomenología subyacente puede usarse para explorar intuiciones, dificultades de aprendizaje, etc.… En este caso, la simulación reemplaza al mundo real, que ha de modelizase.

El modelo de enseñanza que proponen para los futuros profesores de enseñanza secundaria (alumnos de 11 a 16 años) empieza con el análisis de datos y estadística descriptiva usando un software comercializado. La simulación como método se introduce a estos estudiantes en paralelo al concepto de probabilidad. Las situaciones, dicen, son modeladas matemáticamente y por simulación, comparando los resultados (ibid, p. 1).

A diferencia de las simulaciones de “lápiz y papel” propuestas en los dos trabajos ya mencionados, en este se nota la irrupción del software educativo especializado en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Así, lo que parece que estos autores van a construir es un método ligado al software particular que está disponible, con el fin de realizar las simulaciones sujetas a las propias restricciones del software. Por tanto, lo que se propone como metodología de enseñanza consistiría en instruir a los estudiantes en la traducción desde el mundo de la probabilidad en el que está formulado el problema que se quiere resolver al mundo del software en el que se va a simular. Esto hace que el software provoque ciertas restricciones o dificultades en la traducción entre ambos mundos y que las soluciones que se obtengan de la simulación sean interpretadas con dificultad en el contexto en el que se formula el problema.

Pero, en la manera de resolver los problemas por simulación habrá siempre una discusión subyacente al enfrentar la simulación de “lápiz y papel” y la simulación mediante software. O lo que es lo mismo, obtener conclusiones a partir de una simulación basándose en la ley de los pequeños números o en la ley de los grandes números. En su lugar, en nuestra opinión, lo que sería pertinente es preguntarse cuándo, cómo y por qué, en este orden o en un orden parecido, se ha de introducir el software (la ley de los grandes números) a la manera de resolver problemas por simulación y no adaptar la simulación al software disponible. Debería ser el resolutor quien decidiera en qué se apoya para dar respuesta al problema. Discutiremos sobre esto un poco más adelante.

Lo que los autores (Maxara y Biehler, 2006) llaman simulación estocástica consiste en un proceso en tres pasos: establecer un modelo estocástico, escribir *un plan de simulación* y la realización con la ayuda del software. Para nosotros el modelo estocástico forma parte de lo que hay que hacer para resolver el problema simulado. Para estos autores, formular un modelo estocástico para una situación aleatoria real dada consiste en describirla mediante modelos concretos (urnas) o, incluso, en una forma más abstracta. Los estudiantes han de determinar el conjunto de resultados posibles (el espacio muestral), la distribución de probabilidad, el número de pasos del experimento y los sucesos o variables aleatorias de interés. El plan de simulación por su parte está compuesto por 5 pasos que obligatoriamente se han de cumplir y que se asemeja al que en Zimmermann (2002) se describe como proceso de simulación y que básicamente consiste en 1) establecer el problema con sus hipótesis, 2) asignar números aleatorios (o los resultados posibles de un “generador de probabilidad”), 3) definir un ensayo o prueba, 4) Repetir el ensayo muchas veces y 5) Determinar la probabilidad empírica.

3. Algunas nociones importadas del estilo heurístico en la resolución de problemas de matemáticas.

En resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos, como es nuestro caso, suele decirse que su investigación puede llevarse a cabo en más de un escenario, dependiendo del ámbito más o menos amplio en el que se consideren los problemas: los problemas de matemáticas y el currículum, una familia particular de problemas o un problema en concreto en una situación de enseñanza en concreto. Además, en cualquiera de esos escenarios, pueden considerarse hasta tres personajes que intervienen en la “función”: los problemas solamente, los problemas y sus resolutores y finalmente a los problemas, a sus resolutores y a los profesores que enseñan la resolución de esos problemas a sus resolutores. Es lo que Cerdán (2008) y otros (por ejemplo Puig, 1996) llaman teoría de los niveles de análisis en resolución de problemas. Pues bien, aquí nuestro interés fundamental consiste en el análisis de los modos de resolver una familia particular de problemas de matemáticas, lo que llamamos problemas de probabilidad, es decir, problemas que, formulados en una situación aleatoria o de incertidumbre, preguntan, en cualquiera de las formas en la que es habitual hacerse así, por la probabilidad de un suceso o el valor esperado de una variable aleatoria o cualquier otra cuestión sujeta a incertidumbre. No implicaremos a sus resolutores ni a los profesores, pues quedan como propuestas para indagaciones futuras.

Desde un punto de vista heurístico vamos a tomar prestadas algunas nociones sobre el estilo heurístico de resolución de problemas (Puig, 1996), como son la noción de herramienta heurística, de sugerencia heurística y de método de resolución con contenido heurístico. Entendemos por *herramienta heurística*: a un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro (Ibid, p. 41). Pero además consideramos esta noción bajo esta acotación que aclara su uso: lo que una herramienta heurística hace es transformar el problema en otro, aunque no lo resuelve ni siquiera garantiza su solución. Simular el lanzamiento de la moneda mediante el lanzamiento de una moneda de euro es una herramienta heurística que transforma el problema inicial en otro. Simular con números aleatorios también es una herramienta heurística pues tiene la capacidad de transformar cualquier problema en otro problema referido a ellos (Método de Monte Carlo, Engel 1975a). Ente un problema de probabilidad la sugerencia *simula el problema* constituye una sugerencia que desencadena el uso de herramientas heurísticas. Pero estas no son las únicas que se pueden considerar, como veremos más adelante. Siñériz y Puig (2006) definen *método de resolución con contenido heurístico* a un conjunto de reglas que generan nuevos problemas a partir de uno que se pretende resolver, hasta llegar a uno considerado elemental, o conocido, y que, por tanto, se sabe resolver, o a uno ya resuelto. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación se referirá pues como el conjunto de “cosas” que hay que hacer para generar problemas nuevos a partir del problema inicialmente formulado, de manera que sobre aquellos se sepa cómo resolverlos.

4. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación.

Por todo lo anterior, diremos que un problema de probabilidad se ha resuelto por simulación si, durante el proceso de resolución el problema formulado, al que llamaremos *problema original,* se ha transformado en otro, al que llamaremos *problema simulado,* mediante algún generador de azar, de tal forma que, desde un punto de vista probabilístico, el problema simulado es equivalente al original, problema éste que se es capaz de abordar y del que se puede proporcionar alguna respuesta a lo que en él se pregunta, y de cuya respuesta (la del problema simulado) se puede inferir una respuesta posible para el problema original (Figura 1). Si la solución del problema simulado depende de un número dado de ensayos o pruebas entonces su fiabilidad o credibilidad dependerá de la manera en la que se considere ley de los grandes o pequeños números. Así pues, en este trabajo usamos la palabra simulación en un doble sentido: como proceso o manera de resolver problemas de probabilidad y como experimentación en el seno del problema simulado.

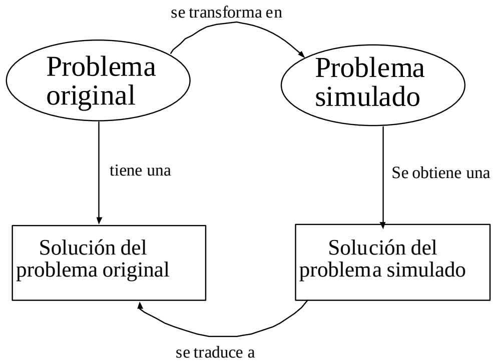

Figura 1. Esquema básico del proceso de resolución de un problema de probabilidad por simulación.

Resolver un problema por simulación implica considerar pues herramientas que transformen el problema original en otro, de tal manera que, para la herramienta considerada, el problema original y el problema simulado sean, probabilísticamente equivalentes[1]. Desde un punto de vista didáctico, lo interesante de dichas herramientas es su carácter y potencial heurístico, de exploración y de descubrimiento, que permiten ser consideradas en un buen número de problemas distintos. Desde el punto de vista del resolutor, que su conocimiento y experiencia en las herramientas le permitan obtener la mayor cantidad posible de información para que pueda ser tratada con posterioridad para dar respuesta al problema original. Por tanto, situados en el problema simulado, el resolutor ha de saber encontrar y formular una respuesta a lo preguntado en él, lo que le exige considerar los instrumentos y métodos estadísticos necesarios para tratar con la información disponible. Ha de abordar así un problema estadístico auxiliar asociado al problema simulado. La respuesta dada al problema simulado, mediante la solución del problema estadístico, se ha de "devolver" con posterioridad al problema original, lo que necesariamente implica considerar la naturaleza empírica de la probabilidad y su "estabilidad" ante un número elevado de ensayos.

Como el proceso de trasformación depende de la herramienta considerada, a cualquiera que se interese por los procesos de resolución de estos problemas le pueden surgir una serie de preguntas que seguramente deberían tenerse en cuenta, ya sea en los análisis sobre la actuación de cualquier resolutor o bien durante la enseñanza de la manera de resolver los problemas por simulación, como son, por ejemplo, (parafraseando a Puig, 1996 en p. 41): ¿cuál es la intención de uso de la herramienta? Si uso tal o cual herramienta, ¿cómo está relacionado el problema original con el problema simulado por la herramienta? Una vez obtenga una solución al problema simulado, ¿qué implicaciones puede tener en relación con la solución del problema original? ¿Qué se puede exportar de la solución del problema simulado al problema original y qué no? ¿Cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se exporte de la solución del simulado? ¿Requiere ser reformulado el problema original? Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta. Así, habría

[1] Si al problema original se le puede asociar un modelo teórico que lo resuelve, diremos que el problema simulado converge estocásticamente al problema original si las frecuencias relativas convergen en probabilidad hacia las probabilidades teóricas y los valores medios de las variables estadísticas cuantitativas convergen en probabilidad a las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias correspondientes. Recíprocamente, las probabilidades teóricas y las esperanzas matemáticas del problema original pueden interpretarse como frecuencias relativas o valores promedios en el problema simulado.

que considerar estas preguntas para diferentes generadores de azar: urnas, dados, pirindolas, etc.., tablas de números aleatorios, generadores de número aleatorios en hojas de cálculo, programas en R o en Matlab.

Con el fin de ver en qué consiste la manera de resolver un problema por simulación, consideremos el siguiente problema, en el que detrás de la sencillez de su enunciado oculta un buen número de dificultades para su resolución teórica. Un problema similar ya lo planteaba Shaughnessy (1983) en su propuesta de *simulation for simulation (p. 340)*:

Una conocida firma de pastelería regala con cada uno de sus pasteles una figurita que incluye en el interior del envoltorio con el que los vende. La colección completa está formada por 6 figuritas. ¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?

Asumamos que el problema formulado (el original) no se sabe resolver teóricamente pues el modelo teórico que da cuenta de él está al alcance de unos pocos e incluso fuera del nivel de nuestros estudiantes o de los objetivos de enseñanza para el que se plantea el problema, no en balde se trata de una cadena de Markov absorbente[2]. Propongamos como objetivo que el resolutor llegue a dar una respuesta al problema y que ésta sea lo más razonable posible y, además, que mientras esto ocurre él o ella aprenda a manejarse en entornos de incertidumbre. Nuestro objetivo no es, por el momento, transitar hacia el modelo teórico ni enseñar el algoritmo (Engel, 1975b) como paso intermedio, sino una manera de dar respuesta al problema que llamamos por simulación.

Según se desprende del esquema de la figura 1, para el trabajo que hay que hacer pueden identificarse cuatro momentos a lo largo del proceso de resolución completo que implica, de una parte, trabajo independiente en cada uno de ellos pero sin "perder de vista" a los otros": trabajo en el problema original, trabajo en el problema simulado, trabajo con la solución del problema simulado y trabajo con la solución del problema original, y, claro está, trabajo en las correspondientes relaciones/traducciones (Figura 2, anexo). El trabajo que hay que hacer puede sugerirse durante el proceso de enseñanza, descomponiéndose este en ocho "tiempos" para la indagación y la reflexión, como veremos en el apartado siguiente.

Excepto la primera vez, cada vez que adquiera un pastel obtengo una de las 6 figuritas[3] que o bien no la tenía aún e incrementa la colección, o bien ya la tenía y estoy en las mismas circunstancias que estaba antes de comprarlo. Pero cada vez que lo compro no sé qué figurita me va a salir hasta que no abra el envoltorio. Por hipótesis (hipótesis 1) puedo pensar que cualquiera de las figuritas es susceptible de aparecer en un pastel con la misma probabilidad que tendría cualquiera otra, 1/6, también bajo la hipótesis (hipótesis 2) de que la firma de la pastelería ha distribuido uniformemente sus figuritas entre sus bolsas conteniendo los pasteles

[2] Un recurso alternativo para este problema lo constituye el ábaco probabilístico de A. Engel (1975b). ¡Un algoritmo determinista resolviendo una situación aleatoria! Sugerimos al lector que resuelva el problema como le apetezca, bien considerándolo como una cadena de Markov o bien considerándolo como "un paseo aleatorio" en el ábaco de Engel, si le apetece. Si no es así, tampoco pasa nada, pues la lectura de este trabajo no depende de ello. Tal vez le apetecería simularlo para hacerse una ligera idea de "por dónde van los tiros" o incluso ir más allá, hacia una solución razonable y fiable, o incluso más allá, al modelo teórico. Una vez formulado, el problema pertenece solamente al resolutor.

[3] El número es ilustrativo e intencionado, proporcionado por el profesor.

que vende y (hipótesis 3) el centro comercial distribuye los pastelitos uniformemente en sus estantes. Dejaré de comprar pastelitos en el momento en el que tenga la colección completa. ¿Tendré la colección completa alguna vez? ¿Habrá que comprar muchos pasteles?

Al lanzamiento de un “dado cúbico” y observar la cara sobre la que se posa también se le ha concedido la hipótesis (hipótesis 1, en el problema original) de la equiprobabilidad, asignándole a cualquier de sus caras el valor de 1/6 para su probabilidad. Le concedemos a los lanzamientos sucesivos de un dado, anotando cada vez los resultados que aparecen, la hipótesis de ser un experimento aleatorio compuesto de pruebas independientes (hipótesis 2 y 3, en el problema original). Lanzar el dado repetidamente, anotar el resultado de la cara sobre la que se posa, hasta que se haya posado en las 6 caras por lo menos una vez simula el proceso de comprar pasteles (por el lanzamiento del dado) hasta tener las 6 figuritas (todas las caras del dado aparecen por primera vez en una racha de resultados). El problema simulado queda así: ¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado cúbico hasta que éste tarde o temprano se pose al menos una vez en todas sus caras? Como consecuencia, ¿se posará sobre todas las caras, al menos una vez?, ¿habrá que hacer para que eso ocurra muchos lanzamientos?

Abordemos el problema simulado. Lancemos el dado cuantas veces estimemos que sea necesario. Diremos que hemos realizado una simulación cuando al lanzar repetidamente el dado hemos conseguido reproducir el suceso por el que se nos pregunta. Lo que esta simulación produce es información sobre lo que ha ocurrido, información que debe ser organizada y tratada. Surge así el problema estadístico asociado al problema simulado. La consideración, la definición de variables estadísticas es consustancial al proceso y el tamaño de la población también. Ahora la pregunta ¿cuántas simulaciones hay que hacer para dar respuesta al problema es, entre otras, pertinente? La pregunta tiene múltiples respuestas, probablemente tantas como resolutores y tantas como niveles de exigencia sean requeridos para la respuesta que se proporciona. Por lo menos dos simulaciones, por aquello de promediar. Ahora bien, el estado de incertidumbre que me puede producir una respuesta basada en dos simulaciones puede ser mayor que si hago muchas más. Pero, ¿cuántas más?

Algunos métodos para determinar la probabilidad experimental de un suceso sugieren realizar un número de simulaciones dado de antemano: 50, 100, o 1000, número con el que se considera que se puede proporcionar una respuesta razonable al problema simulado (por ejemplo, paso 7 en el modelo de Byan, 1986). Otros, como los libros de texto por lo general, son mucho más ambiguos: muchas simulaciones, cuantas más mejor. En todo caso, siempre el resolutor se hará preguntas alrededor de cualquier sugerencia que se le haga sobre el número de simulaciones que habrá que hacer ¿por qué ese número y no otro? La respuesta concluyente es de naturaleza matemática[4], aunque en todo caso el número de aquellas dependerá solo del resolutor y del grado de credibilidad o fiabilidad que éste le otorgue a una respuesta basada en el número de simulaciones que él o ella haya considerado que es razonable realizar. O, tal vez, del profesor quien establece cuáles son dichas condiciones. Por ejemplo, supóngase que se quiere

[4] Sea p la probabilidad teórica de un suceso S. Sea fr_n la frecuencia relativa asociada a ese suceso en n pruebas de un experimento aleatorio que lo simula. La versión fuerte de la ley de los grandes números establece la convergencia estocástica de las frecuencias hacia las probabilidades en los siguientes términos: $P(fr_n \to p) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

una aproximación de la probabilidad teórica de hasta un 1% ($\varepsilon = 0.01$) con un grado de confianza del 95%, $\delta = 0.95$. En estas condiciones el profesor demanda de sus estudiantes un número de simulaciones n_0 que puede ser calculada usando la desigualdad de Chebyschev (DeGroot, 1975, p. 185-186): $n_0 \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\delta)}$. Claro que para obtener este número se ha de partir de una probabilidad teórica *p* conocida. Aunque, no obstante, se puede estimar el máximo necesario para una aproximación y grados de confianza dados, maximizando la función $n = kp(1-p)$, siendo $K = \frac{1}{\varepsilon^2(1-\delta)}$ una constante prefijada[5]. En realidad este número tiene más valor metodológico que real, ya que permite hacer el tránsito desde la simulación en lápiz y papel al uso consciente de la simulación con la ayuda de un software. No tanto para el resolutor cuyo nivel de satisfacción y exigencia podría darse con un número menor de simulaciones.

En todo caso la respuesta al problema simulado depende del grado de precisión y fiabilidad con la que se quiera expresar. Pero no deja de ser una respuesta al problema simulado que requiere ser traducida o usada para dar respuesta al problema original. En los términos en los que está expresada la pregunta: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*, requiere además dar una credibilidad a la respuesta dada a la pregunta en el problema simulado: *¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado hasta que éste, tarde o temprano, se pose en todas sus caras?*, puesto que pide del resolutor un grado de creencia o credibilidad que le concede a dicho valor promedio.

5. Una manera de enseñar la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación en la formación de maestros. Un ejemplo.

Describiré a continuación cómo se ha formulado este problema a estudiantes para maestro y algunas consecuencias que se han observado al hacerlo así.

Antes de este problema los estudiantes habían abordado otros tres problemas, un problema sobre rachas de longitud 2 con monedas, explorando si es un juego justo. El problema de la existencia o no de una estrategia ganadora en el juego de "piedra-papel-tijera" y, finalmente, el problema de la cueva (Huerta, 2002) con la misma metodología que se ha usado con el problema que hemos resuelto en el apartado anterior. Los objetivos de enseñanza son variados y, entre otros, los siguientes:

- Explorar las diferentes naturalezas del concepto probabilidad en la resolución de problemas de probabilidad.
- Explorar el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación.

[5] Para cualquier ε y δ que se considere, esta función alcanza un máximo para p=1/2. El número máximo de simulaciones dependerá de estos valores y se puede estimar por $n_0 = \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\delta)}$.

- Explorar si la resolución de problemas de probabilidad por simulación facilita y permite modificar el juicio subjetivo que posee el resolutor sobre los fenómenos aleatorios implicados en el problema.

Hay todavía un objetivo más, sobre potencialidades, como consecuencia del trabajo que se está haciendo mientras se resuelve el problema: explorar el potencial que tiene el método de resolución de los problemas por simulación y sus objetivos de enseñanza para la educación primaria.

El problema se enuncia a los estudiantes tal y como lo hemos presentado en el apartado anterior, junto con la tarea descompuesta en 8 tiempos y un conjunto de cuestiones asociadas a cada tiempo a modo de sugerencias heurísticas. El número de tiempos está relacionado con las macro-etapas del método de resolución (Figura 1) y las sugerencias con el trabajo que habría que hacer en cada una de ellas (Figura 2, en el anexo). El número de sugerencias es claramente variable y puede ser modificado dependiendo del problema y del nivel de los resolutores. Los tiempos y las sugerencias formuladas para el problema han sido las siguientes:

- Primer tiempo: Exploración de la situación real, de lo que está sujeto a incertidumbre y no lo está, de lo que es conocido y desconocido en la situación real.
    - ¿Crees tener seguridad de que tarde o temprano se completará la colección de figuritas? ¿Por qué?
    - Al comprar un buen número de pasteles, ¿en qué condiciones puede encontrarse la colección de figuritas?
    - Entonces, ¿cuántos pasteles exactamente se tendrían que comprar para tener la colección completa? ¿Por qué?
- Segundo tiempo: Juicios subjetivos a priori derivados del análisis de la situación real.
    - ¿Qué crees que es más fácil que ocurra, conseguir la colección completa o no conseguirla? ¿Por qué?
    - Si no sabes exactamente cuántos comprar, al menos haz una conjetura sobre el cuántos, ¿Cuántos pasteles estimas que se tendrían que comprar, más o menos, para poder conseguir la colección completa? ¿Por qué?
- Tercer tiempo: Fiabilidad o credibilidad de la conjetura.
    - Quieres explorar hasta qué punto es fiable o creíble tu conjetura sobre la posibilidad de conseguir toda la colección completa y sobre el número de pasteles que habría que comprar para obtenerla. ¿Cómo lo harías?
- Cuarto tiempo: La Simulación, necesidad y uso de herramientas heurísticas. El problema simulado.
    - ¿Experimentar o simular? ¿Puede experimentarse el problema? Por el contrario, ¿solamente se puede simular? ¿Por qué?
    - Si lo vas a simular la compra de pasteles, ¿qué vas a usar para ello? Si hay hipótesis que formular, ¿qué hipótesis son estas?
    - ¿En qué consiste una simulación?

    - ¿Cómo queda ahora el problema original en términos de la simulación (el problema simulado)? Formúlalo sin usar las palabras “pasteles” ni “figuritas” solamente en términos de la herramienta usada.
    - ¿Puedes decir otra forma de simular el problema? Repite todas las cuestiones anteriores para la nueva herramienta considerada.
    - Para las simulaciones pensadas y sus correspondientes problemas simulados formulados, ¿en qué crees que te van a ayudar a la hora de dar respuesta al problema original?
- Quinto tiempo: La simulación productora de la información dependiente de la herramienta usada. Tratamiento de la información, el problema estadístico asociado dependiente del número de simulaciones realizadas.
    - Resuelve los problemas simulados.
- Sexto tiempo: Equivalencia de problemas. Equivalencia entre los problemas simulados dependientes de las herramientas consideradas
    - Tienes una solución para cada uno de los problemas simulados. Si las comparas, ¿qué puedes decir de ellas?
    - ¿Te lo esperadas? ¿Por qué?
    - Entonces, ¿Cuál de las soluciones anteriores vas a usar para dar respuesta al problema original? ¿Por qué?
- Séptimo tiempo: De la solución del problema simulado a la solución del problema original.
    - Ahora, con la información disponible de las soluciones de los problemas simulados, trata de dar respuesta a la pregunta formulada en el problema original: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*
    - Justifica por qué crees que es ese número. ¿Qué significa para ti es número?
- Octavo tiempo. La devolución de la solución al problema original: utilidad y fiabilidad.
    - ¿Hasta qué punto crees que es fiable la respuesta que acabas de dar?
    - ¿Podrías mejorar aún más esa fiabilidad de la respuesta o la credibilidad que le concedes?
    - Seguro que has vivido situaciones como la que acabas de resolver en este problema. ¿Hasta qué punto la solución que has obtenido se puede considerar como solución de una situación real que hayas vivido?
    - ¿Qué se puede aprovechar de esa solución para la situación real vivida por ti y qué no? Explícate lo mejor que puedas.
    - La reflexión anterior, ¿afectaría a la formulación del problema original? ¿De qué manera?

Podría comprobarse como lo que se le ofrece al estudiante es un método de resolución con potencial heurístico en 8 pasos, ya que, por una parte, tiene vocación de ser útil no solo para este problema sino para otros problemas de probabilidad en los que haya que tratar con probabilidades y variables aleatorias y, de otra, tiene ese marcado carácter de exploración en busca de la información que permite contestar a lo que se pregunta en él.

6. Conclusiones y reflexiones finales.

La manera de resolver un problema de probabilidad por simulación es un proceso realmente complejo y en algunas ocasiones difícil. Parece pues pertinente preguntarse, a la luz de lo expuesto anteriormente, ¿por qué resultaría de interés enseñar a los futuros maestros[6] esta manera de resolver problemas de probabilidad, por simulación como la hemos llamado? De la experiencia propia puede apuntarse que, en general, este enfoque produce más beneficios que perjuicios, pues, en nuestra opinión, hay unas cuantas razones sobre las que se sustenta y que tal vez lo justificarían. Una de ellas, citando a Freudenthal (1973), es permitir que los futuros maestros aprecien qué es eso de las Matemáticas: *To explain to people what mathematics really means, one finds the most convincing examples in probability* (p. 583), algo a lo que no están realmente acostumbrados ni preparados. Pero, además, porque esta manera de resolver los problemas pone en contacto al futuro/a maestro/a con dos tipos de informaciones referentes a los fenómenos que aparecen implicados en los problemas, informaciones de las que dependen las decisiones que toma el resolutor a lo largo de la resolución, informaciones que en términos de Borovcnik (2011, p. 72) son de tipo *objetivista* y *subjetivista*, lo que como consecuencia favorece el uso de la probabilidad tanto en su naturaleza objetiva (clásica o frecuentista) como subjetivista (bayesiana). Porque, también, pone al estudiante para maestro/a en contacto continuamente con la conjetura, en el mismo sentido que Bernouilli (1713, p. 211 y sig., citado en Sylla, 2014, p. 30): *Conjeturar sobre algo es medir su probabilidad: por tanto definimos el arte de conjeturar (Ars Conjectandi), o estocástica (Stochastice), como el arte de medir las probabilidades de las cosas tan exactamente como sea posible, para concluir que, a nuestro juicio y acciones, siempre podemos escoger o seguir aquello que se ha encontrado ser lo menor, más satisfactorio, más seguro, o más cuidadosamente considerado*[7].

Pero, también, la manera de resolver así permite al futuro maestro/a separar una “realidad” representada por el problema original del modelo creado para simular y representado por el problema simulado. Separación que resulta dura y complicada cuando el resolutor ha de formular dicho problema simulado en función de la herramienta o generador de azar considerado. Además, permite al resolutor apreciar a los generadores de azar como herramientas de transformación de un problema en otro, con el fin de indagar y explorar nuevas informaciones que no se disponían con anterioridad, con la pretensión de que sean útiles para la resolución del problema original, de ahí su carácter heurístico.

Pero aún creemos que hay más razones. Resolver los problemas de esta manera pone en contacto dos tipos de razonamiento, el razonamiento estadístico y el probabilístico, como sea que se les considere. La información proporcionada por el problema simulado, a veces escasa a veces abundante o incluso muy abundante, requiere de la formulación de pequeños o grandes problemas estadísticos auxiliares que permitan dar respuesta a las preguntas planteadas en él. Respuestas que requieren ser interpretadas en términos del problema original, de la “realidad”

[6] Esta pregunta y su reflexión posterior también la formularía en la formación de futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, aunque habría que matizar algunos aspectos debido a la diferente formación matemática inicial de ambos colectivos.

[7] Traducción del autor.

representada por él, apreciando de este modo por qué se hacen matemáticas y al servicio de qué. Porque en el desarrollo de la manera de resolver que hemos propuesto en este trabajo el resolutor, futuro maestro/a, convive con las sugerencias de tipo heurístico que le han permitido avanzar en la búsqueda de una respuesta a cualquiera de los problemas auxiliares formulados a lo largo del proceso de resolución. Porque, en suma, el estudiante para maestro/a conoce un método de resolución de problemas de probabilidad con potencial heurístico que le ayudará seguramente a considerar la posibilidad de otro enfoque de la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria, alternativo al existente, como lo demuestran sendos trabajos de realizados por un estudiante del grado de Maestro en Educación Primaria con su trabajo de fin de grado titulado “La simulación en el aprendizaje de la probabilidad en Primaria (11-12 años)” (Capella, 2013) y un segundo correspondiente al Trabajo de fin de Máster en Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria titulado “La simulación y la resolución de problemas de probabilidad. Estudio sobre su influencia en la probabilidad subjetiva en alumnos de 13 y 14 años” (Capella, 2014). Al menos estamos en el buen camino.

Referencias

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía, XV*(35), 39 -54.

Batanero, C., Biehler, R & Maxara, C. (2010). *Using simulation to Bridge Teachers’ Content and Pedagogical Knowledge in Probability*. Paper presented at the 15th ICMI Study.

Batanero, C., Godino, J. & Cañizares (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En *Proceedings of First ICMI African Regional Conference*. Johannesburg: ICMI.

Benson, C. T. & Jones, G. A. (1999). Assessing Students' Thinking in Modeling Probability Contexts. *The mathematics Educator 4*(2), 1-21.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the Role of Probability Within Statistics Curricula. In C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study*, pp. 71-83.

Bryan, B. (1986). *Using simulation to model real world problems*. Proceedings of the ICOTS-2 conference, pp. 86-90. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings.

Capella, J. (2013). *La simulació en l’aprenentatge de la probabilitat en Primària*. Treball de Fi de Grau de Mestre en Educació Primària. Universitat de Valencia. Valencia, España. Disponible en http://roderic.uv.es

Capella, J. (2014). *La simulació i la resolució de problemes de probabilitat. Estudi sobre la influència en la probabilitat subjectiva en alumnes de 13 i 14 anys*. Trabajo de Fin de Máster no publicado. Universitat de València. Valencia, España.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de València. Valencia, España.

Chaput, B., Girard, J.C., Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study*, pp. 85-95.

Engel, A. (1975a). *L’enseignement des probabilités et de la statistique*. Paris, France : CEDIC.

Engel, A (1975b). The Probabilistic Abacus. *Educational Studies in Mathematics, 6*(1), 1-22.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordretch, The Netherlands: Reidel.

Godino, J., Cañizares, M. J., y Díaz, C. (2010). *Teaching Probability to Pre-service Primary School Teachers through Simulation*. Retrieved from http://iase-web.org/documents/papers/isi54/2989.pdf

Gnanadesikan, M; Scheaffer, R. & Swift, J (1987). *The Art and Techniques of Simulation* (Teachers Edition). USA: Dale Seymour Publications.

Heitele, D. (1975). An Epistemological view on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

M. Henry (Ed.) (2005). *Autour de la modélisation en probabilités*. IREM de Franche-Comté: Presses universitaires de Franche-Comté: Université de Franche-Comté.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 75-86.

Maxara, C & Biehler, R. (2006). Students' simulation and modelling competence after a computer-intensive elementary course in statistics and probability. *Proceedings of the ICOTS-7 conference*, pp. 1-6. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

DRAE (2015). Diccionario de la Real Academia Española. Disponible en http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae

Sánchez, E. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. *Proceedings of the ICOTS 6 conference*, 1-6. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings

Saughnessy, J. M. (1983). The Psychology of Inference and The Teaching of Probability and Statistics: Two Sides of the Same Coin? R. W. Sholz (Ed.), *Decision Making Under Uncertainty*. North-Holland: Elsevier Science Publishers, 325-350.

Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. Aymerich y S. Macario, (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI*. Castelló de la Plana, España: Publicacions de la Universitat Jaume I, 323-332.

Sylla, E. D. (2014). Tercentenary of *Ars Conjectandi* (1713): Jacob Bernoulli and the Founding of Mathematical Probability. *International Staistical Review*, *82*, 27-45.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulation during instruction*. Doctoral Dissertation. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.Zimmerman.Dissertation.pdf

ANEXO.

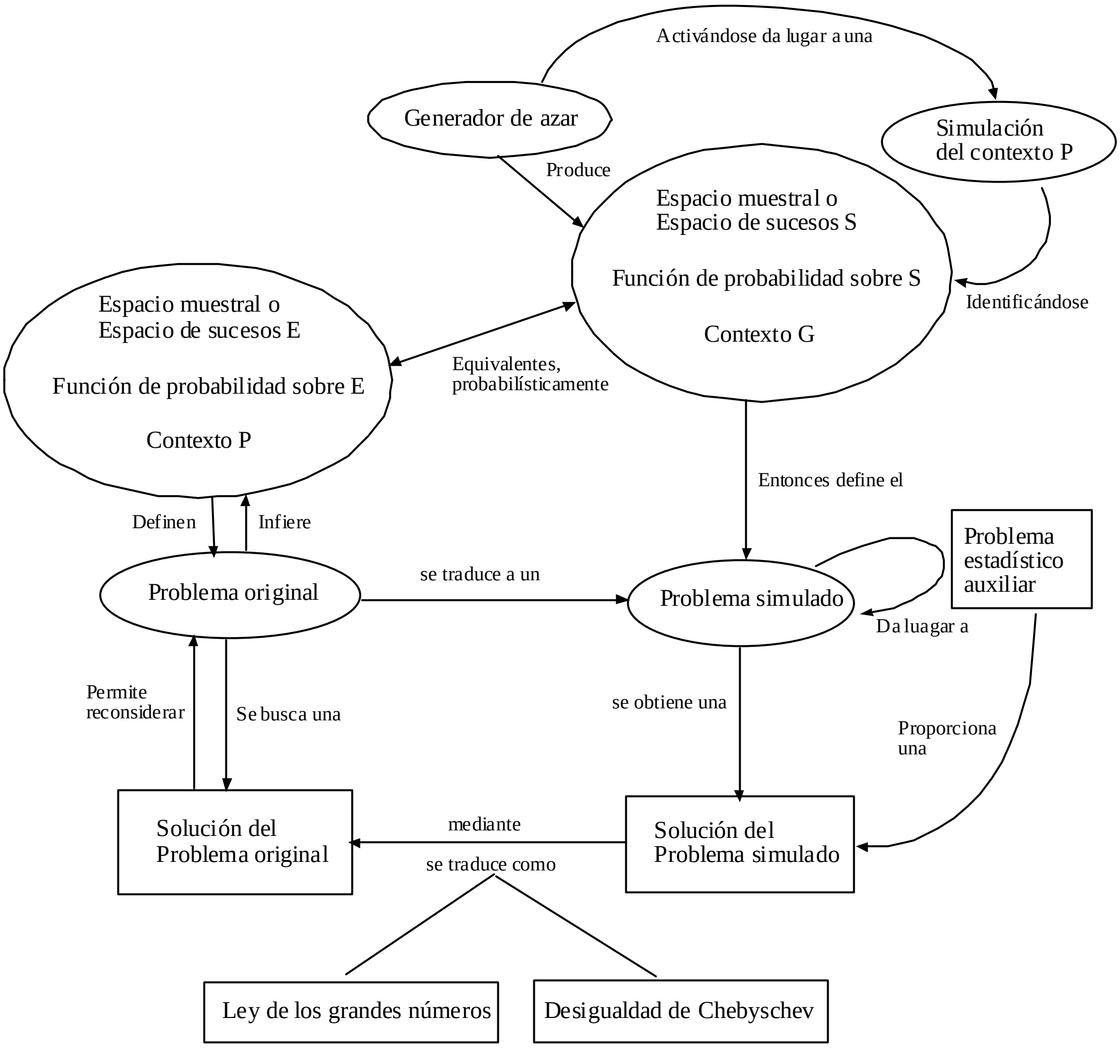

Figura 2. El trabajo durante la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Incluso un esquema tan complejo como este no refleja fielmente todo el trabajo que realmente hay que hacer cuando se aborda la resolución de un problema de esta manera.